Integrales de línea y Teoría de Cauchy

Pedro Tamaroff

1. Notación y convenciones

"The Committee which was set up in Rome for the unification of vector notation did not have the slightest success, which was only to have been expected."

Felix Klein, 1908.

En lo que sigue $I = [a, b]$ es un intervalo compacto en $\mathbb{R}$ y Ω denota una región en $\mathbb{C}$. Todo camino en Ω es suave a trozos, salvo mención de lo contrario. Escribimos $\mathrm{PS}(\Omega)$ al conjunto de tales caminos.

Fijemos un camino $\gamma : I \longrightarrow \Omega$. La ***traza de*** γ es $\gamma(I)$ y la notaremos también γ. El ***punto inicial de*** γ es $\gamma(a)$ y el ***punto final de*** γ es $\gamma(b)$, y los notamos $s(\gamma)$ y $t(\gamma)$, respectivamente. Decimos que γ es un ***lazo*** si $s(\gamma) = t(\gamma)$. Si $\delta : I \longrightarrow \Omega$ es otro camino, decimos que γ y δ son ***concatenables*** si $t(\gamma) = s(\delta)$, y escribimos $\gamma * \delta$ al camino $I \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(\gamma * \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t - a) & \text{si } 2t - a \in I \\ \delta(2t - b) & \text{si } 2t - b \in I \end{cases}$$

Está claro que en este caso $\gamma * \delta$ es también un camino suave a trozos, y es precisamente para permitir la concatenación de caminos que ampliamos la clase de caminos suaves a la de caminos suaves a trozos: todo camino suave a trozos es, de forma no necesariamente única, la concatenación de caminos suaves.

Sean $z, w \in C$. Notaremos por $[z, w]$ al camino recto que une z con w, parametrizado por $t \in [0,1] \longmapsto z(1-t) + tw$ y por $\partial B_r(z)$ al círculo de radio r y centro z, parametrizado por $t \in [0, 2\pi] \longmapsto z + re^{it}$. El ***camino constante en*** z está parametrizado por $t \in [0,1] \longmapsto z$ y lo notamos c_z. Los bordes de figuras como discos y rectángulos siempre estarán orientados en sentido antihorario.

Dado un subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ y un intervalo I en $\mathbb{R}$, escribimos $\mathscr{C}(\Omega)$ al conjunto de las funciones continuas en Ω y $\mathscr{C}(I)$ al conjunto de las funciones continuas en I, respectivamente, y escribimos $\mathscr{O}(\Omega)$ al conjunto de funciones holomorfas en Ω.

2. Integrales en intervalos

Fijemos una función continua $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Definimos la ***integral de f sobre I*** por

$$\int_I f\,dt = \int_I \Re f\,dt + i\int_I \Im f\,dt$$

donde las integrales a la derecha denotan integrales de funciones reales, bien definidas por ser $\Re f$ e $\Im f$ continuas. Por su definición, la integral de f disfruta de propiedades análogas a las que valen para integrales reales usuales.

Proposición 2.1. *Valen las siguientes propiedades para la función*

$$\int_I : \mathscr{C}(I) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

(1) $\mathbb{C}$-linealidad. *Si $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ es otra función continua y si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\int_I (f+\lambda g)\,dt = \int_I f\,dt + \lambda\int_I g\,dt.$$

(2) Aditividad en intervalos. *Si subdividimos a I en dos subintervalos I_1 e I_2, entonces*

$$\int_I f\,dt = \int_{I_1} f\,dt + \int_{I_2} f\,dt.$$

(3) Compatibilidad.

$$\Re\left(\int_I f\,dt\right) = \int_I \Re f\,dt, \qquad \Im\left(\int_I f\,dt\right) = \int_I \Im f\,dt.$$

(4) Continuidad. *Vale la estimación*

$$\left|\int_I f\,dt\right| \leqslant \int_I |f|\,dt.$$

Demostración. Dado que las primeras dos propiedades se demuestran exactamente como en el caso real y que la tercera es una verificación inmediata, sólo probamos la validez de la última. Tomemos $\varphi \in [0,2\pi]$

tal que $e^{i\varphi}\int_I f\,dt \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_I f\,dt\right| &= \left|e^{i\varphi}\int_I f\,dt\right| \\
&= \left|\int_I \Re(e^{i\varphi}f)\,dt\right| && \text{por compatibilidad,} \\
&\leqslant \int_I |\Re(e^{i\varphi}f)|\,dt && \text{por la estimación en el caso real,} \\
&\leqslant \int_I |f|\,dt && \text{por ser } |\Re(f)| \leqslant |f|.
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ◀

Decimos que f es ***derivable*** si lo son su parte real y su parte imaginaria y, en tal caso, definimos $f' = (\Re f)' + i(\Im f)'$. Una función derivable $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ es una ***primitiva de*** f si $F' = f$. La siguiente proposición es simplemente una reformulación del teorema fundamental de cálculo en nuestro contexto, por lo que omitimos su demostración.

Proposición 2.2. *La función $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(t) = \int_a^t f\,dt$ es derivable y es una primitiva de f y, si G es cualquier primitiva de f, entonces*

$$\int_I f\,dt = G(b) - G(a).$$

Un corolario inmediato de lo anterior es el siguiente, que usaremos con frecuencia en las próximas secciones.

Corolario 2.3. *Dos primitivas de $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ difieren en una constante.*

3. Integrales de línea

Fijemos ahora una funcion continua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Si γ es un camino suave en Ω, entonces $\gamma' : I \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y la función $(f \circ \gamma)\gamma' : I \longrightarrow \mathbb{C}$ es, a su vez, también continua. Definimos la ***integral de*** f ***a lo largo de*** γ por

$$\int_\gamma f\,dz = \int_I (f \circ \gamma)\gamma'\,dt.$$

Si γ es una concatenación $\gamma_1 * \gamma_2$ de caminos suaves $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}$, definimos

$$\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz.$$

Inductivamente, queda definida la integral de f sobre un camino arbitrario. De lo ya demostrado deducimos algunas propiedades análogas para integrales de línea.

Proposición 3.1. *Fijemos un camino γ en Ω. Valen las siguientes propiedades para la función*

$$\int_\gamma : \mathscr{C}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

(1) $\mathbb{C}$-linealidad. *Si $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es otra función continua y si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\int_\gamma (f + \lambda g)\,dz = \int_\gamma f\,dz + \lambda \int_\gamma g\,dz.$$

(2) Aditividad. *Si subdividimos a γ en dos caminos concatenables γ_1 y γ_2, entonces*

$$\int_\gamma f\,dt = \int_{\gamma_1} f\,dt + \int_{\gamma_2} f\,dt.$$

Por conveniencia, extendemos la definición de la integral de línea para contemplar operaciones usuales sobre γ: definimos

$$\int_\gamma f\,d\overline{z} = \int_I (f \circ \gamma)\overline{\gamma'}\,dt, \qquad \int_\gamma f\,|dz| = \int_I (f \circ \gamma)|\gamma'|\,dt.$$

Notemos que en particular $\int_\gamma |dz| = \int_I |\gamma'|\,dt$ es la longitud de la curva γ, que notamos $L(\gamma)$. No es difícil verificar ahora las siguientes propiedades usando la Proposición 2.1 en el segundo caso.

1. $\overline{\int_\gamma f\,dz} = \int_\gamma \bar{f}\,d\overline{z}$
2. $\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leqslant \int_\gamma |f||dz|$.

De la segunda propiedad deducimos el siguiente resultado, que será central en mucho de lo que sigue.

Lema 3.2. (Estimación estándar.) *Para todo camino $\gamma \in \mathrm{PS}(\Omega)$, vale la estimación*

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leqslant L(\gamma)|f|_\gamma.$$

donde $|f|_\gamma = \max_{t\in I} |f(\gamma(t)|$ es el máximo de f sobre γ.

Queda como ejercicio demostrar que la integral de línea es independiente de la parametrización elegida de un camino, por lo que siempre eligiremos arbitrariamente la parametrización de un camino que nos resulte más conveniente.

Dado un camino $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$, definimos γ^* como el camino que tiene la misma traza que γ pero recorrida en el sentido inverso: $\gamma^*(t) = \gamma(b+a-t)$ para $t \in I$. Llamamos a γ^* el ***camino inverso a γ***. Es fácil verificar que, con esta definición,

$$\int_{\gamma*} f\,dz + \int_\gamma f\,dz = 0.$$

Tendremos la oportunidad de usar lo anterior cuando integremos sobre dos curvas que se solapan sobre algun segmento y sobre el que tienen orientaciones inversas. Lo anterior afirma que la contribución de este segmento a la integral es nula.

Si f es continua en Ω, una ***primitiva de f en Ω*** es una función F, holomorfa en Ω, tal que $F' = f$. En este caso decimos que f es ***integrable en Ω***. Como sucedió en el caso de integrales sobre intervalos, tenemos un análogo al teorema fundamental del cálculo, que es simplemente una reformulación del mismo en nuestro contexto. La existencia de primitivas ahora no está garantizada, como veremos más adelante.

Proposición 3.3. *Una función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una primitiva de f en Ω si y solamente si*

$$\int_\gamma f\,dz = F(t(\gamma)) - F(s(\gamma))$$

para todo camino γ en Ω.

Demostración. Podemos asumir que γ es suave por la aditividad de la integral. En este caso, si $F' = f$, entonces la regla de la cadena garantiza que $(f \circ \gamma)\gamma' = (F \circ \gamma)'$ y, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_\gamma f\,dz = \int_I (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

como afirma la proposición.

Supongamos ahora que vale la condición sobre caminos para F y fijemos $w\in\Omega$. Podemos tomar un disco B con centro w contenido en Ω y, si z está en tal disco,

$$F(w) - F(z) = f(w)(z-w) + \int_{[w,z]} (f(\xi) - f(w))\,d\xi.$$

que podemos reescribir, si definimos $F_1(z) = \dfrac{1}{z-w}\displaystyle\int_{[w,z]} (f(\xi)-f(w))\,d\xi$ si $z\neq w$ y $F_1(w) = 0$, como

$$F(w) - F(z) = f(w)(z-w) + F_1(z)(z-w).$$

Queda ver que F_1 es continua en w. Usando la estimación estándar, resulta que

$$|F_1(z)| \leqslant \frac{1}{|z-w|} L([z,w]) |f - f(w)|_{[z,w]} = |f - f(w)|_{[z,w]},$$

pues $L([z,w]) = |z-w|$. Finalmente, como f es continua en w, obtenemos que $\lim\limits_{z\to w} F(z) = 0$, como queríamos. ◀

De lo anterior deducimos una parte del siguiente teorema:

Teorema 3.4. *La función f admite una primitiva en Ω si y solamente si para todo lazo γ en Ω,*

$$\int_\gamma f\,dz = 0.$$

Demostración. La proposición anterior implica que si F es una primitiva de f y γ es un lazo en Ω,

$$\int_\gamma f\,dz = F(t(\gamma)) - F(s(\gamma)) = 0,$$

que prueba una de las implicaciones. Supongamos que vale la condición sobre caminos cerrados para f, y eligamos un punto $c \in \Omega$ y, para todo $z \in \Omega$, elijamos un camino γ_z que une c con z. Definimos

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)\,d\xi.$$

Para ver que F es una primitiva de f, basta ver que si γ es un camino en Ω que une z con w, vale la igualdad

$$F(z) - F(w) = \int_{\gamma} f(\xi)\,d\xi,$$

y esto es inmediato, pues podemos reescribirla como

$$\int_{\gamma_z * \gamma^* * \gamma_w^*} f(\xi) d\xi = 0,$$

y $\gamma_z * \gamma^* * \gamma_w^*$ es un lazo. ◀

El siguiente resultado afirma que podemos intercambiar integrales con límites uniformes de funciones.

Lema 3.5. *Supongamos que (f_ν) es una sucesion en $\mathscr{C}(\Omega)$ y converge de forma localmente uniforme a $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. Para todo camino γ en Ω,*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{\gamma} f_\nu\,dz = \int_{\gamma} f\,dz.$$

Demostración. Para cada punto c de γ existe un disco abierto B_c donde $f_\nu \longrightarrow f$ uniformemente, y los discos B_c con $c \in \gamma$ cubren a γ. Como γ es compacta, finitos discos $B_1, \ldots, B_s$ la cubren, y luego $f_\nu \longrightarrow f$ uniformemente en γ. Pero, por la estimación estándar,

$$\left| \int_{\gamma} (f - f_\nu)\,dz \right| \leqslant |f - f_\nu|_\gamma L(\gamma)$$

y, como $|f - f_\nu|_\gamma \to 0$ en vista de la convergencia uniforme, lo mismo vale para el término izquierdo, como queríamos. ◀

4. Teoría de Cauchy en discos

I. La fórmula integral de Cauchy

Nos proponemos ahora probar el siguiente resultado, conocido como la ***fórmula integral de Cauchy***, del que podremos deducir una batería de herramientas teóricas muy útiles.

Teorema 4.1. *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y si B es un disco cuya clausura está contenida en Ω, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

para todo punto $z \in B$. En particular, si c es el centro de B y r su radio,

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) \, dt.$$

Para demostrarlo, nos valdremos de algunos resultados preliminares. Uno se deduce del cálculo, quizás no tan simple, de una familia de integrales, centrales a la teoría de Cauchy.

Lema 4.2. *Sea B un disco y $\nu \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{d\xi}{(\xi - z)^\nu} = \begin{cases} 1 & \textit{si } \nu = 1 \textit{ y } z \in B, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. En caso que $\nu > 1$ la función $h_\nu(\xi) = (\xi - z)^{-\nu}$ admite como primitiva a $H_\nu(\xi) = (1-\nu)^{-1}(\xi - z)^{1-\nu}$, por lo que el Teorema 3.4 da lo que queremos. Supongamos entonces que $\nu = 1$. Si z no está en $\overline{B}$, entonces h_1 admite como primitiva a $\log(\xi - z)$ en $\mathbb{C} \setminus L$, donde L es una semirrecta con origen en z que no corta a $\overline{B}$. Nuevamente, concluímos lo que queremos con el Teorema 3.4.

Basta considerar el caso que $z \in B$. Supongamos primero que z es el centro c de B y que r es su radio. Entonces $\gamma(t) = c + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$

parametriza a ∂B y calculamos

$$\int_{\partial B} \frac{d\xi}{\xi - c} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i dt = 1.$$

Supongamos ahora que $z \neq c$. Escribimos

$$h_1(\xi) = \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - c} \frac{1}{1 - \dfrac{z - c}{\xi - c}} = \frac{1}{\xi - c} \sum_{\nu \geqslant 0} \left(\frac{z - c}{\xi - c} \right)^{\nu}.$$

Esta expansión en serie es válida en el conjunto de los ξ con $|\xi - c| > |z - c|$, que no es otra cosa que el complemento de un disco con centro en c y radio $|z - c|$, es decir, un anillo no acotado de centro c, que en particular contiene al disco B. Además, la convergencia es normal y luego uniforme en cualquier conjunto de la forma $A_t(c) = \mathbb{C} \smallsetminus B(c, t)$ con $t > |z - c|$, y podemos elegir tal anillo no acotado $A_t(c)$ para que contenga el borde de B. Por el Lema 3.5, basta con evaluar las integrales

$$I_\nu = \int_{\partial B} \frac{1}{\xi - c} \left(\frac{z - c}{\xi - c} \right)^{\nu} d\xi.$$

Pero esto ya lo hicimos: sabemos que $I_\nu = 0$ si $\nu > 0$, mientras que si $\nu = 0$, obtenemos

$$I_0 = \int_{\partial B} \frac{1}{\xi - c} d\xi = 2\pi i.$$

Esto completa la demostración. ◀

Ejercicio 4.1. Usando lo anterior, probar que $f(z) = z^{-1}$ no admite una primitiva en ninguna región de $\mathbb{C}^\times$ que contiene un círculo con el origen en su interior.

El siguiente resultado, conocido como el ***teorema de Goursat***, es la piedra angular de la teoría de Cauchy.

Teorema 4.3. *Sea $c \in \Omega$ y sea f holomorfa en $\Omega \smallsetminus \{c\}$ y continua en c. Entonces para todo rectángulo R en Ω,*

$$\int_{\partial R} f \, dz = 0.$$

Demostración. Supongamos primero que f es holomorfa en todo Ω y fijemos un rectángulo R en Ω. Por comodidad, notamos $\alpha(R) = \int_{\partial R} f\, dz$. Descompongamos a R en cuatro rectángulos congruentes $R_1, \ldots, R_4$, como ilustra la Figura 1. Los segmentos internos a R se cancelan unos con otros, y $\alpha(R) = \sum_{i=1}^{4} \alpha(R_i)$, así resulta que

$$|\alpha(R)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} |\alpha(R_i)|,$$

y debe ser el caso que $|\alpha(R^1)| \geqslant 4^{-1}|\alpha(R)|$ para R^1 alguno de los rectángulos $R_1, \ldots, R_4$. Si es el caso que esta desigualdad vale para todos, acordamos elegir el de la esquina inferior izquierda.

Repetimos ahora el argumento para R^1, obteniendo $R^2 \subseteq R^1$ que cumple $|\alpha(R^2)| \geqslant 4^{-1}|\alpha(R^1)|$. Inductivamente, construímos una familia decreciente de rectángulos $\mathscr{R} = \{R^j : j \in \mathbb{N}\}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$,

- $|\alpha(R^j)| \geqslant 4^{-j}|\alpha(R)|$,
- $L(\partial R^j) = 2^{-j} L(\partial R)$.
- $\bigcap_{j \geqslant 1} R^j$ contiene exactamente un punto z_0.

La función f es holomorfa en z_0, y luego existe una función f_1, continua en z_0, tal que $f_1(z_0) = 0$ y

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + f_1(z)(z - z_0).$$

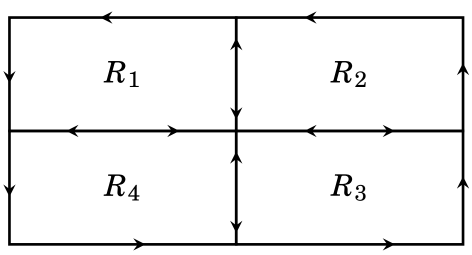


Figura 1: El primer paso de la subdivisión de R en la demostración.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \varepsilon$ implica $|f_1(z)| < \varepsilon$, y tomemos $j \gg 0$ tal que R^j está contenido en $B(z_0, \delta)$: esto es posible por la forma en que construímos la familia $\mathscr{R}$. Como el polinomio lineal $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ admite una primitiva, su integral sobre el lazo ∂R^j se anula, y luego

$$a(R^j) = \int_{\partial R^j} f_1(z)(z - z_0)\,dz.$$

Además, la estimación estándar asegura que

$$|a(R^j)| \leqslant \varepsilon L(\partial R^j) \max_{\partial R^j} |z - z_0|$$

pues $|f_1|_{\partial R^j} < \varepsilon$. Como la diagonal mayor de R^j no supera su perímetro, obtenemos que $|a(R^j)| \leqslant \varepsilon L(\partial R^j)^2$.

Reemplazando esto último en la desigualdad $|a(R^j)| \geqslant 4^{-j}|a(R)|$ y usando la igualdad $L(\partial R^j) = 2^{-j} L(R)$ obtenemos que

$$a(R) \leqslant 4^j 4^{-j} L(R)^2 \varepsilon = L(R)^2 \varepsilon$$

y, en vista de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, que $a(R) = 0$, como se dijo.

El caso que f es holomorfa salvo posiblemente en c es ahora fácil. Dado un rectángulo R en Ω podemos asumir, primero, que el punto excepcional c está en R, y segundo, que es de hecho un vértice de R: si no es el caso, la siguiente figura muestra como expresar $a(R)$ como una suma de cuatro términos $a(R^1), \ldots, a(R^4)$ donde R^i es un rectángulo con un vértice en c, y será suficiente ver que cada una de éstas integrales se anulan.

Ahora simplemente podemos escribir $a(R) = a(R')$ donde R' es un subrectángulo arbitrario de R con vértice en c, usando lo anterior y, dado que $|a(R)| \leqslant L(\partial R)|f|_{\partial R}$ y que $|f|_{\partial R}$ está acotada y $L(\partial R) \to 0$ si R se aproxima a c, deducimos lo pedido, que completa la demostración del teorema. ◀

Notemos que la misma demostración funciona si cambiamos rectángulos por triángulos. Usaremos esto en lo que sigue.

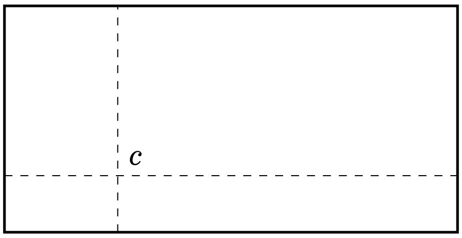


Figura 2: La reducción al caso que c es un vértice de R.

Diremos que Ω tiene ***centro estelar*** c si para todo $z \in \Omega$ el segmento $[c,z]$ está contenido en Ω. En ese caso, diremos que Ω es un ***conjunto estelar con centro*** c. Vale notar que un conjunto estelar puede admitir más de un centro: por ejemplo, un conjunto convexo C es precisamente aquel que es estelar con centro c para todo $c \in C$.

Teorema 4.4. (Teorema integral para regiones estelares.) *Sea Ω estelar con centro c, y sea f holomorfa en Ω. Entonces f en integrable en Ω y la función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$F(z) = \int_{[c,z]} f(\xi)\, d\xi$$

es una primitiva de f. En particular, $\int_\gamma f\, dz = 0$ para todo camino cerrado en Ω.

Demostración. Basta observar que si z y w son dos puntos en Ω, el teorema de Goursat asegura que

$$F(z) - F(w) = \int_{[w,z]} f(\xi)\, d\xi.$$

pues la integral de f sobre el triángulo con vértices z, w y c es nula. Podemos imitar ahora la demostración del Teorema 3.4 para probar que $F' = f$. ◀

El teorema anterior implica que toda función holomorfa admite una primitiva *localmente*: si f es holomorfa en Ω y z es un punto de esta región, entonces f tiene integral nula sobre cualquier triángulo contenido en un disco convexo B con centro z y contenido en Ω, y luego por el teorema anterior admite allí una primitiva. Podemos dar ahora la

Demostración del Teorema de Cauchy. Tomemos $z \in B$, un disco B' en Ω que contiene a B, y consideremos la función $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \quad \text{para } \xi \in \Omega.$$

Evidentemente g es holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$ y continua en z. Por el teorema de Goursat en su versión para triángulos, g tiene integral nula sobre cualquier triángulo, y luego, por el Teorema 4.4, g admite una primitiva en el conjunto convexo B', y luego su integral sobre cualquier lazo en B' es nula. En particular,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} g(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{d\xi}{\xi - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z), \end{aligned}$$

dónde última integral la calculamos en el Lema 4.2. Si elegimos $z = c$ el centro de B, entonces

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) dt.$$

Esto completa la demostración del teorema. ◀

La última igualdad que obtuvimos se conoce como la ***igualdad del valor medio*** para funciones holomorfas, y afirma que el valor de $f(c)$ queda determinado por los valores de f en cualquier disco de centro c y radio suficientemente pequeño. En particular, deducimos la ***desigualdad del valor medio:*** si f es holomorfa en un entorno de c y B es un disco suficientemente pequeño con centro c, entonces $|f(c)| \leqslant |f|_{\partial B}$.

Veamos una aplicación del Teorema 4.4 al cálculo de una integral.

Proposición 4.5. *Fijemos* $0 < a \leqslant 1$. *Entonces*

$$\int_0^\infty e^{-(1+ai)^2t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{1+ai}$$

Demostración. Sea $r > 0$ y sea T_r un triángulo con vértices en 0, $r(1+ai)$ y r, orientado positivamente. Integrando a la función entera $f(z) = e^{-z^2}$ sobre T_r, que es un lazo en el conjunto convexo $\mathbb{C}$, obtenemos la igualdad

$$\int_{[0,r]} f\,dz = \int_{[0,r(1+ia)]} f\,dz + \int_{[r,r(1+ai)]} f\,dz.$$

Las primeras dos integrales coinciden con

$$\int_0^r e^{-t^2}\,dt \qquad \text{y} \qquad (1+ai)\int_0^r e^{-(t(1+ai))^2}\,dt$$

respectivamente. Veamos que sucede con la última integral, que es igual a

$$I(r) = i\int_0^{ar} f(r+it)\,dt.$$

Ahora, tenemos la estimación $|f(r+it)| = e^{-r^2+t^2} \leqslant e^{-r^2}e^{rt}$ si $0 \leqslant t \leqslant r$ y, como $ar \leqslant r$, a su vez podemos estimar nuestra integral como sigue:

$$|I(r)| \leqslant \int_0^{ar} e^{-r^2}e^{rt}\,dt \leqslant e^{-r^2}\int_0^r e^{rt}\,dt.$$

Finalmente, sabemos que $\int_0^r e^{rt}\,dt = r^{-1}(e^{r^2}-1)$, así $|I(r)| \leqslant r^{-1}$, y esto tiende a cero cuando $r \to \infty$. Deducimos que, en el límite,

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = (1+ai)\int_0^\infty e^{-(t(1+ai))^2}\,dt,$$

que completa la demostración si usamos que $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ◀

II. Desarrollo en series de potencias

Usando la fórmula integral de Cauchy podemos probar que toda función holomorfa en Ω admite un desarrollo en serie de potencias en torno a cada punto de esta región. Una función con esta propiedad se dice ***analítica en*** Ω. Recordemos que toda función analítica es holomorfa.

Lema 4.6. *Sea γ una curva en Ω y sea f continua en Ω, y definamos otra función $F : \Omega \smallsetminus \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ por*

$$F(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad \textit{para } z \in \Omega \smallsetminus \gamma.$$

Entonces:

(1) F es holomorfa en $\Omega \smallsetminus \gamma$.

(2) Para cada punto c en tal dominio la serie de potencias

$$\sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu (z-c)^\nu \qquad \textit{con coeficientes} \qquad a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{\nu+1}}\, d\xi$$

converge en todo disco centrado en c que no corta a γ y converge, de hecho, a F.

(3) F es infinitamente derivable y, para cada natural ν y cada $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma$,

$$\frac{F^{(\nu)}(z)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{\nu+1}}\, d\xi.$$

En la demostración que sigue omitimos algunos cálculos intermedios y cuando lo hacemos lo marcamos con una estrella ($\star$). Si duda de algunas de tales igualdades, está obligado a verificarlas en detalle.

Demostración. Fijamos un disco B con centro c y radio r que no corta a γ. Si $|w| < 1$, diferenciando la serie geométrica, obtenemos la igualdad

$$\frac{1}{(1-w)^{\nu+1}} = \sum_{j \geqslant \nu} \binom{\nu}{j} w^{j-\nu} \tag{1}$$

que, con el cambio de variable $w = (z-c)(\xi-c)^{-1}$, da la igualdad

$$\frac{1}{(\xi-z)^{\nu+1}} \overset{\star}{=} \sum_{j\geqslant\nu}\binom{\nu}{j}\frac{1}{(\xi-c)^{\nu+1}}(z-c)^{j-\nu}.$$

válida para cada $z\in B$ y $\xi\in\gamma$.

Para cada $j\in\mathbb{N}$, pongamos $f_j(\xi)=f(\xi)(\xi-c)^{-j-1}$ donde ξ está en γ. Por lo anterior, deducimos que si $z\in B$,

$$\frac{\nu!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{\nu+1}}\,d\xi \overset{\star}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{j\geqslant\nu}\nu!\binom{\nu}{j}f_j(\xi)(z-c)^{j-\nu}d\xi. \tag{2}$$

Como $|\xi-c|\geqslant r$ para ξ en γ, la definición de f_ν asegura que $|f_\nu|_\gamma \leqslant r^{-\nu-1}|f|_\gamma$ y, a su vez, esto asegura que, si $q=r^{-1}|z-c|$,

$$|g_\nu|_\gamma|(z-c)^{\nu-j}| \overset{\star}{\leqslant} r^{-\nu-1}|f|_\gamma|q^{\nu-j}.$$

Como $0\leqslant q<1$ para nuestra elección de z y como la serie de (1) converge para $w=q$, deducimos que la serie en (2) converge normalmente y luego, por el Teorema 3.5, podemos intercambiar la suma y la integral, obteniendo

$$\frac{\nu!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{\nu+1}}\,d\xi \overset{\star}{=} \sum_{j\geqslant\nu}\nu!\binom{\nu}{j}a_\nu(z-c)^{j-\nu}. \tag{3}$$

Para concluir, notamos que si $\nu=0$ esto da el desarrollo en series buscado y prueba que F es holomorfa y que, además, el término derecho de (3) es el que se obtiene al derivar ν veces el desarrollo en series de potencias de F recién obtenido, que da la tercera afirmación del lema. ◀

En vista del teorema integral de Cauchy y este lema, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.7. *Toda función f holomorfa en Ω admite un desarrollo en serie de potencias en torno a cada punto $c\in\Omega$*

$$\sum_{\nu\geqslant 0}a_\nu(z-c)^\nu \qquad \textit{con coeficientes} \qquad a_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-c)^{\nu+1}}\,d\xi$$

que converge compactamente en $B(c,r)$ donde r es menor a la distancia de c al borde de Ω. En particular, f es derivable infinitamente y para cada $\nu \in \mathbb{N}$ vale la fórmula integral

$$\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{\nu+1}}\,d\xi.$$

Una consecuencia notable de este resultado es que la serie de Taylor de una función entera en torno a *cualquier* punto converge en *todo* $\mathbb{C}$. Todo lo hecho hasta ahora prueba el siguiente teorema.

Teorema 4.8. *Sea $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. Son equivalentes*

(1) f es holomorfa en Ω,

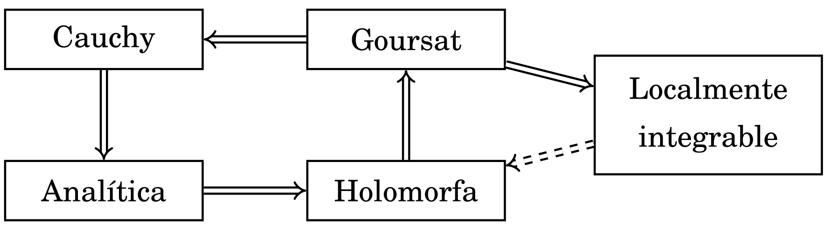
(2) f es analítica en Ω,

(3) f es localmente integrable en Ω,

(4) f tiene integral nula sobre cualquier triángulo en Ω,

(5) f cumple la fórmula integral de Cauchy para todo disco con clausura contenida en Ω.

Demostración. En efecto, tenemos el siguiente diagrama de implicaciones



que sabemos valen, salvo posiblemente aquella punteada. Sin embargo, una función localmente integrable es localmente la derivada de una función holomorfa, y ya sabemos que la derivada de una función holomorfa es ella misma holomorfa. Deducimos así que todas las afirmaciones son equivalentes. ◀

Con el teorema anterior podemos probar que $\mathscr{O}(\Omega) \subseteq \mathscr{C}(\Omega)$ es un subespacio cerrado respecto a la convergencia local uniforme.

Proposición 4.9. *El límite localmente uniforme de funciones holomorfas es también una función holomorfa.*

Demostración. Sea (f_ν) una sucesión en $\mathscr{O}(\Omega)$ y supongamos que converge de forma localmente uniforme a f. Entonces $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ y, por el Lema 3.5, para todo triángulo T en Ω,

$$\int_{\partial T} f\,dz = \lim_{\nu\to\infty} \int_{\partial T} f_\nu\,dz = 0,$$

en vista de que cada f_ν es holomorfa y el teorema de Goursat. Luego f tiene integral nula sobre todo triángulo contenido en Ω, y es holomorfa por el teorema anterior. ◀

Con un poco más de trabajo, podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 4.10. *Con las hipótesis y la notación de la proposición anterior, el limite de derivadas (f_ν') converge de forma localmente uniforme a f' en Ω.*

Demostración. Por la fórmula de Cauchy, si B es un disco con clausura contenida en Ω y si $z \in B$,

$$f_\nu'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f_\nu(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2}\,d\xi.$$

Si tomamos un disco B' con clausura contenida en B, existe $r > 0$ tal que $|z-\xi| \geqslant r$ para $\xi \in \partial B$ y $z \in B'$, y luego la estimación estándar asegura que

$$|f_\nu' - f'|_{B'} \leqslant R r^{-2} |f_\nu - f|_{\partial B},$$

donde R es el radio de B. Como $f_\nu \longrightarrow f$ uniformemente en el compacto ∂B, obtenemos lo que queríamos. ◀

5. Primitivas e invarianza homotópica

I. Primitivas a lo largo de funciones

Hasta ahora definimos la integral de una función continua sobre un camino en el caso que éste sea suave a trozos. Una forma indirecta de extender la definición a caminos que son solamente *continuos* es mediante la noción de primitiva a lo largo de un camino, que presentamos ahora. Veremos también una segunda forma de hacer ésta extensión cuando presentemos la noción de homotopía entre caminos.

Fijemos un camino continuo $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ y una función holomorfa f en Ω. Una ***primitiva de f a lo largo de Ω*** es una función $F : I \longrightarrow \Omega$ que cumple la siguiente condición: para cada $t \in I$ existe un entorno abierto U de $\gamma(t)$ y una primitiva G de f en U tal que $F \circ \gamma = G$ en un entorno de t.

Proposición 5.1. *La función f admite primitivas a lo largo de γ y dos de ellas difieren en una constante.*

Demostración. Como dos primitivas de f difieren de una constante, lo mismo será cierto para primitivas de f a lo largo de curvas. Para ver que tales primitivas existen, notemos que existe, para cada punto z de γ, un disco B_z y una primitiva F_z de f en tal disco. Como γ es compacto, existen finitos discos que los cubren y podemos elegir, por la continuidad uniforme de γ, una subdivisión $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ de I de forma que cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ tenga imagen bajo γ en alguno de estos finitos discos, que notamos B_i. Notemos también F_i a la primitiva de f correspondiente a B_i. En particular, F_0 da una primitiva de f a lo largo de $\gamma|_{[t_0,t_1}$. Supongamos que obtuvimos una primitiva $F_{0,i}$ de f a lo largo de $\gamma|_{[t_0,t_i]}$. Como B_i y B_{i+1} se intersecan en un conjunto conexo que contiene a $\gamma(t_i)$, existe una constante c tal que $F_{0,i} = F_{i+1} + c$. Podemos reemplazar a F_{i+1} por $F_{i+1} + c$, que sigue siendo una primitiva local de f, y obtenemos así una primitiva de f a lo largo de $\gamma|_{[t_0,t_{i+1}]}$. Inductivamente, queda construída F una primitiva de f a lo largo de toda la curva γ. ◀

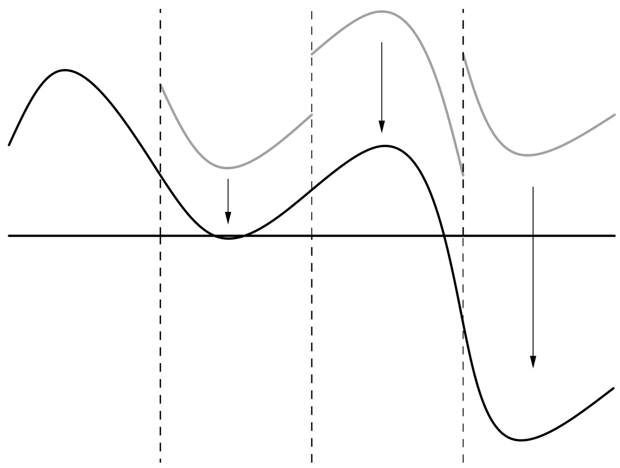


Figura 3: Un esquema del argumento de pegado en la demostración.

Dada una primitiva F de f a lo largo de γ, definimos la integral de f a lo largo de γ por

$$\int_\gamma f\,dz = F(b) - F(a).$$

Esta definición no depende de la elección de primitiva F por la proposición anterior y es consistente con nuestra definición en el caso que γ sea suave a trozos en vista de la Proposición 3.3: es suficiente usar tal proposición en los subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ donde f admite una primitiva F_i para obtener

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=0}^{n-1} (F(t_{i+1}) - F(t_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} f\,dz \\ &= \int_\gamma f\,dz. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.1. Probar que si γ es un lazo que no pasa por el origen, la integral $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$ es un entero. *Sugerencia:* dos ramas del logaritmo difieren en un múltiplo entero de $2\pi i$.

II. Homotopías

Fijemos ahora $I = [0,1]$ el intervalo unidad y dos caminos γ_0 y $\gamma_1 : I \longrightarrow \Omega$ y consideremos los casos en que

(a) tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final ó,

(b) ambos son caminos cerrados.

Una ***homotopía de γ_0 a γ_1*** es una función continua $H : I \times I \longrightarrow \Omega$ que cumple que

- $H(s,0) = \gamma_0(s)$ para $s \in I$,
- $H(s,1) = \gamma_1(s)$ para $s \in I$,
- $t \longmapsto H(0,t)$ y $t \longmapsto H(1,t)$ son caminos constantes en el caso (a) o que,
- $s \longmapsto H(s,t)$ es un lazo para cada $t \in I$ en el caso (b).

En el caso (a) decimos que γ_0 y γ_1 son ***homotópicos por extremos fijos en Ω*** y en el caso (b) que son ***homotópicos como lazos en Ω***, y en ambos casos notamos $\gamma_0 \simeq \gamma_1$. Es útil pensar a una homotopía como una familia continua de caminos $\gamma_t(s) = H(s,t)$ que comienza en $\gamma_0(t)$ y termina en $\gamma_1(t)$. La Figura 4 ilustra una homotopía en el primero de los dos casos. El lector está invitado a hacer lo mismo en el segundo caso.

Teorema 5.2. (Invarianza homotópica) *Si γ_0 y γ_1 son caminos homotópicos en Ω, entonces*

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz.$$

Fijamos una función continua $H : I \times I \longrightarrow \Omega$. Para demostrar el teorema anterior usamos nuevamente la noción de primitivas a lo largo de una función continua: una ***primitiva de f a lo largo de H*** es una función $F : I \times I \longrightarrow \Omega$ que cumple la siguiente condición: para cada $(s,t) \in I$

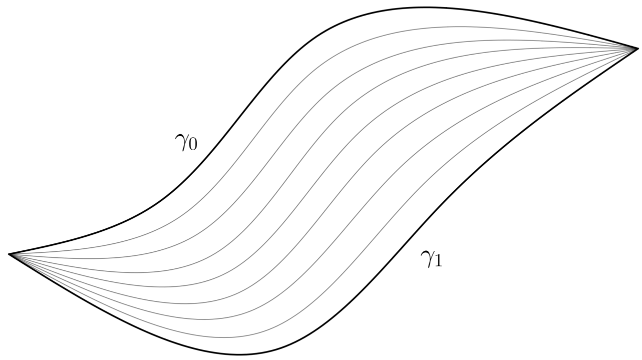


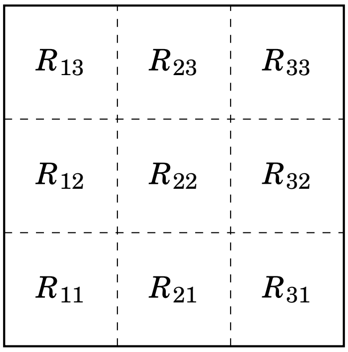
Figura 4: Una homotopía con extremos fijos entre γ_0 y γ_1.

existe un entorno abierto U de $H(s,t)$ y una primitiva G de f en U tal que $G \circ H = F$ en un entorno de (s,t).

Proposición 5.3. *La función f admite primitivas a lo largo de H, y dos de ellas difieren en una constante.*

Demostración. El argumento es similar al que ya hicimos para un camino, pero ahora subdividimos al cuadrado $I \times I$ en cuadrados mas pequeños donde f admite primitivas locales, y luego, muy cuidadosamente, pegamos las primitivas para obtener una global.

Para cada punto de la imagen $H(I \times I)$ existe un disco que lo contiene, y en el que f admite una primitiva. La compacidad de $I \times I$ y la continuidad de H aseguran que existen finitos de estos discos que cubren a $H(I \times I)$ y, por la continuidad uniforme de H en $I \times I$, podemos subdividir a $I \times I$ en finitos rectángulos R_{ij} de forma que $H(R_{ij})$ está contenido en alguna de éstas finitos discos, que notamos B_{ij}. A las respectivas primitivas locales en esos discos las notamos F_{ij}, y asumimos que los R_{ij} están etiquetados de forma que se ubican en $I \times I$ como lo ilustra la figura siguiente en el caso que haya 9 de ellos.



La función F_{11} ciertamente es una primitiva de f a lo largo de $H|_{R_{11}}$, y B_{11} se interseca con B_{12} en un conjunto conexo no vacío, asi F_{12} difiere de F_{11} en una constante. Esto permite definir una primitiva de f a lo largo de H sobre $R_{11} \cup R_{12}$. Inductivamente, podemos definir una primitiva de f a lo largo de la primera columna de rectángulos $C_1 = R_{11} \cup \cdots \cup R_{1n}$, obteniendo una función que notamos F_1.

Hacemos ahora lo mismo para cada una de las finitas columnas para obtener funciones F_i que son primitivas de f a lo largo de la restricción de H a esa columna C_i de rectángulos. Podemos ahora repetir la misma idea para pegar a éstas primitivas: la columna de rectángulos C_1 se corta con la columna C_2 en un conjunto conexo no vacío, asi F_1 y F_2 difieren de una constante. Inductivamente, modificamos las restantes primitivas para obtener la primitiva deseada, definida en todo $I \times I$. ◀

Notemos que esto generaliza lo que ya hicimos para caminos: si H es una homotopía entre dos caminos γ_0 y γ_1 y si F es una primitiva de f a lo largo de H, entonces para cada $s \in I$ la función $t \longmapsto F(s,t)$ es una primitiva de f a lo largo de $t \mapsto \gamma_t(s)$, y para cada $t \in I$ la función $s \longmapsto F(s,t)$ es una primitiva de f a lo largo de $s \mapsto \gamma_t(s)$.

Las Figuras 5 y 6 ilustran el proceso de pegado inductivo que dimos en el teorema. Podemos dar ahora la

Demostración de la invarianza homotópica de la integral. Dada una homotopía $H : I \times I \longrightarrow \Omega$ de γ_0 a γ_1, sea $F : I \times I \longrightarrow \Omega$ una primitiva de f a lo largo de H. Como $H(s,0) = \gamma_0(s)$ y $H(s,1) = \gamma_1(s)$, $F(s,0)$ y $F(s,1)$ son

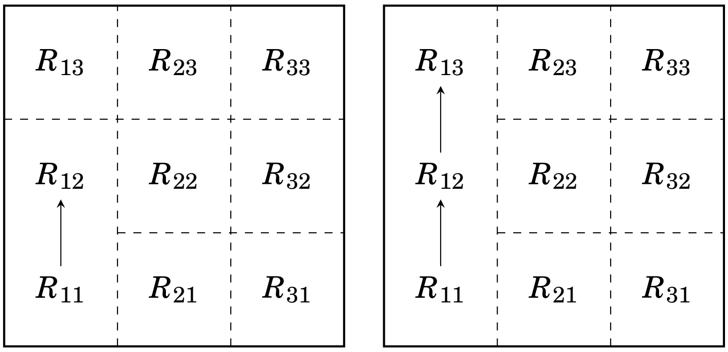


Figura 5: El primer paso, donde obtenemos primitivas en las columnas.

primitivas a lo largo de γ_0 y γ_1 de f, respectivamente, resulta que

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = F(1,0) - F(0,0), \qquad \int_{\gamma_1} f\,dz = F(1,1) - F(0,1).$$

En el caso (a), como $H(0,t)$ y $H(1,t)$ son constantes para $t \in I$, lo mismo vale para F, y deducimos que $F(1,0) = F(1,1)$ y que $F(0,0) = F(0,1)$. En el caso (b), sea $H(0,t) = H(1,t) := \delta(t)$. Entonces tanto $F(0,t)$ como $F(1,t)$ son una primitivas de f lo largo de δ y luego

$$\int_{\delta} f\,dz = F(0,1) - F(0,0) = F(1,1) - F(1,0),$$

que completa la demostración del teorema. ◀

Ejercicio 5.2. Probar que todo camino continuo en Ω, no necesariamente suave a trozos, es homotópico a un camino suave a trozos en Ω.

El ejercicio anterior nos permite definir, de forma indirecta, la integral de $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ sobre caminos continuos arbitrarios y, en vista del teorema anterior, esta definición es compatible con la usual para caminos suaves.

Un lazo en Ω se dice ***nulhomotópico en*** Ω si es homotópico a un camino constante en Ω. Decimos que Ω es ***simplemente conexo*** si todo lazo en Ω es nulhomotópico. La siguiente proposición afirma que las funciones holomorfás "no ven" a los caminos nulhomotópicos.

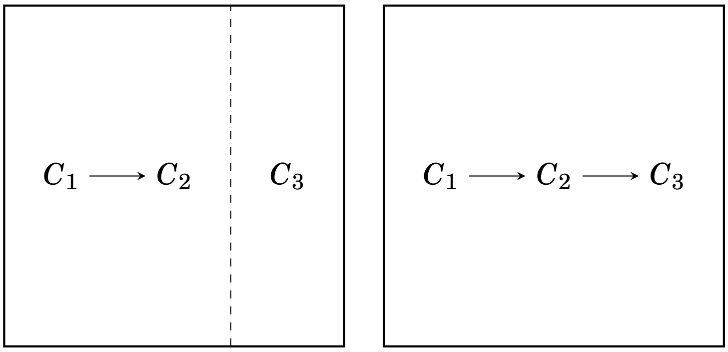


Figura 6: El segundo paso, donde pegamos las primitivas obtenidas en cada columna a una en todo el cuadrado.

Corolario 5.4. *La integral de toda función holomorfa sobre un lazo nulhomotópico es nula.*

Demostración. En efecto, la integral de una función sobre un camino constante es evidentemente nula y, por el Teorema 5.2, lo mismo es cierto para todo camino homotópico a éste. ◀

Otra forma de enunciar lo anterior es la siguiente.

Corolario 5.5. *Si existe una función holomorfa que tiene integral no nula sobre un lazo, este camino no es nulhomotópico.*

Un lazo γ en Ω que asigna integral nula a toda función holomorfa sobre Ω se dice ***nulhomólogo.*** Resulta así que todo lazo nulhomotópico es nulhomólogo. Sin embargo, existen lazos en regiones de $\mathbb{C}$ que son nulhomólogos pero no nulhomotópicos, aunque no tenemos las herramientas disponibles para probar este fenómeno.

6. Homología de regiones en $\mathbb{C}$

Esta sección es opcional, y el lector puede omitirla si así lo desea.

Fijemos una región Ω en $\mathbb{C}$. Diremos que Ω es ***homológicamente simplemente conexa*** si todo lazo en Ω es nulhomólogo. El párrafo de la última seccion afirma que Ω es homológicamente simplemente conexa siempre que es simplemente conexa.

Notemos por $\mathcal{O}'(\Omega)$ al conjunto de funciones holomorfas en Ω que admiten una primitiva. Este conjunto es un subespacio vectorial del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ por lo que tiene sentido formar el cociente

$$H(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{O}'(\Omega),$$

que llamamos el ***primer grupo de cohomología de*** Ω. Escribimos $[f]$ a la clase de una función holomorfa en ese cociente. Por construcción $H(\Omega)$ es cero precisamente cuando toda función holomorfa en Ω admite una primitiva. Veamos un ejemplo donde esto no es cierto, que, de hecho, ya conocemos.

Proposición 6.1. *El* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial* $H(\mathbb{C}^\times)$ *tiene dimensión* 1*, y está generado por la clase de la función holomorfa* $\iota(z) = (2\pi i z)^{-1}$.

Demostración. Consideremos la funcion $\mathbb{C}$-lineal $I : H(\mathbb{C}^\times) \longrightarrow \mathbb{C}$ que, sobre los elementos base, es tal que

$$I([f]) = \int_{\partial B_1(0)} f\,dz.$$

Esto está bien definido: si f admite una primitiva en $\mathbb{C}^\times$, su integral sobre cualquier lazo en $\mathbb{C}^\times$ es nula. Además, esta función es sobreyectiva, pues $I([\iota]) = 1 \neq 0$.

Veamos que es inyectiva. Para esto, es suficiente que verifiquemos que si una función holomorfa cumple que $\int_{\partial B_1(0)} f\,dz = 0$, entonces admite una primitiva en $\mathbb{C}^\times$. Esta condición implica que f tiene integral nula sobre el borde de todo lazo rectangular en $\mathbb{C}^\times$, pues cualquier camino de esta forma es homotópico en $\mathbb{C}^\times$ al borde de un disco: esto es una verificación simple.

Elijamos para todo $z \in \mathbb{C}^\times$ un camino R_z de 1 a z que consiste de caminos rectos que no pasan por el origen, paralelos a los ejes coordenados, como ilustra la figura, y pongamos

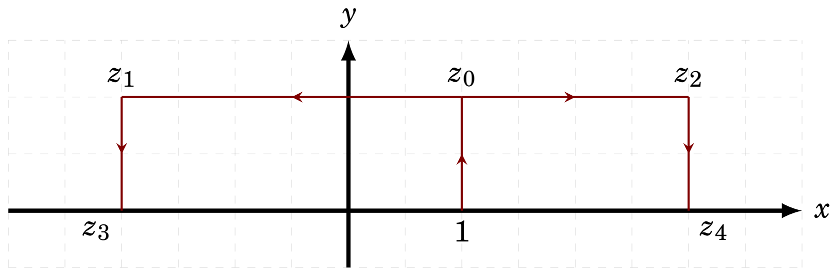


Figura 7: La definición del camino R en el caso que z esá en el semiplano superior nonegativo.

$$F(z) = \int_{R_z} f(\xi)d\xi.$$

Fijemos ahora z en $\mathbb{C}$. Por la forma en que elejimos R_z, y como f tiene integral nula sobre cualquier rectángulo, resulta que, para cada $w \in \mathbb{C}$, la diferencia $F(z) - F(w)$ puede reemplazarse siempre por una integral $\int_\gamma f(\xi)d\xi$ donde γ es un camino poligonal de z a w. Más aún, si tomamos w suficientemente próximo a z, podemos asumir que tal camino es el segmento recto $[z, w]$. Podemos imitar ahora la demostración del Teorema 4.4 para probar que $F'(z) = f(z)$, que prueba que I es inyectiva.

Para ver que $[i]$ genera a $H(\mathbb{C}^\times)$, tomemos $[f]$ en tal conjunto, y sea $\lambda = I([f])$. Entonces $f - \lambda\iota$ tiene integral nula sobre $\partial B_1(0)$ y luego, por lo anterior,

$$0 = [f - \lambda\iota] = [f] - \lambda[\iota],$$

que prueba que $[f] = \lambda[\iota]$ y completa la demostración. ◀

Ejercicio 6.1. Probar que si $h : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es una función holomorfa entre regiones de $\mathbb{C}$, define una función $h^* : H(\Omega_2) \longrightarrow H(\Omega_1)$ tal que $[f] \longmapsto [(f \circ h)h']$. Pruebe, además, que si h es biholomorfa, h^* es un isomorfismo de espacios vectoriales. *Sugerencia:* use la regla de la cadena para probar que si f admite una primitiva, lo mismo es cierto para $h^*(f) = (f \circ h)h'$.

Referencias

[1] Reinhold Remmert, *Theory of Complex Functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer Science+Media, LLC, 1991.

[2] Henri Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Adiwes International Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1963.